

Correction TD MECANIQUE GENERALE GROUPE II

TD N°1

Exercice N°1

$$\vec{OM} = 2(\vec{e}_x; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

a) Determinons les coordonnées cylindrique et spherique de M.

* Coordonnées cylindriques ($\rho; \varphi, z$)

en a: $\vec{OM} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ donc

En coordonnée cylindrique $\rho^2 = x^2 + y^2$ et $\tan \varphi = \frac{y}{x}$

AN: $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{2}$ et $\tan \varphi = \frac{2}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

donc $(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}, 2)$ sont les coordonnées cylindrique de $\vec{OM}$.

• Expression de $\vec{OM}$: $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = 2\sqrt{2} \vec{e}_\rho + 2\vec{e}_z}$

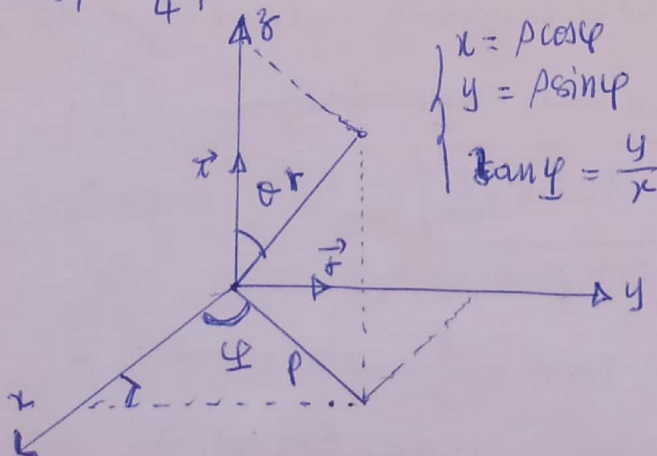
* Coordonnées Spherique ($r; \theta, \varphi$) - en a: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ &\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &\Rightarrow r = \sqrt{4 + 4 + 4} \\ &\Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\rho}{z} \\ &\Rightarrow \tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{\theta = 54,73^\circ} \end{aligned}$$

Donc $(2\sqrt{3}; \frac{\pi}{4}; 54,73^\circ)$

et $\vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = 2\sqrt{3} \vec{e}_r}$



$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{z}{r} \\ \sin \theta = \frac{\rho}{r} \\ \tan \theta = \frac{\rho}{z} \end{cases}$$

⑤ Un point P de coordonnées sphériques $r=2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

Exprimer $\vec{OP}$ dans les repères...

→ cylindrique $(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \cdot \quad \sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r \sin\theta \quad \left| \quad \begin{aligned} z &= r \cos\theta \\ z &= 2 \cos \frac{\pi}{6} \\ z &= \sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \rho = 2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \rho = 1$$

$\vec{OP}$ dans la base cylindrique est $\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{e}_\rho + \sqrt{3} \vec{e}_z$$

En coordonnée cartésienne on a:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{OP}$ dans la base cartésienne est $\vec{OP} = \vec{e}_y + \sqrt{3} \vec{e}_z$

EXERCICE n°2

$$\vec{OM} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

①. * Coordonnée cylindrique de M : (ρ, φ, z)

$$\rho = \sqrt{1+4} \Rightarrow \rho = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\varphi = 2$$

$$\Rightarrow \varphi = 63,43^\circ$$

Donc M a $(\sqrt{5}; 63,43^\circ; 2)$ sont les coordonnées cylindrique de $\vec{OM}$.

* Expression $\vec{OM}$ dans la base cylindrique

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{OM} = \sqrt{5} \vec{e}_\rho + 2 \vec{e}_z$$

* Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r = \sqrt{9} \Rightarrow r = 3$$

$$\tan\theta = \frac{\rho}{z} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 48,18^\circ$$

donc $\boxed{H(3; 48,18^\circ; 63,43^\circ)}$ sont les coordonnées de H dans la base cylindrique. Le vecteur position est $\vec{OH} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{OH} = 3\vec{e}_r$

(2) Il subit une translation $\vec{MP} = 2\vec{e}_r$. Déterminons les coordonnées de P.

* Bases cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec (x, y, z) .

*

* Base cylindrique de $(\vec{e}_r; \vec{e}_\varphi; \vec{e}_z)$ avec $P(\rho; \varphi, z)$

on a: $\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{HP}$ avec $\vec{OH} = 15\vec{e}_r + 28\vec{e}_z$ et $\vec{HP} = 2\vec{e}_r$

$$\text{donc } \boxed{\vec{OP} = (2+15)\vec{e}_r + 2\vec{e}_z}$$

Ainsi $P(2+15; \varphi; 2)$ avec ρ à déterminer.

Supposons que la translation est rectiligne ainsi $\varphi = \text{ct} = 63,43^\circ$.

* Bases cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $P(x, y, z)$

on a: $z = 2$ $\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = \rho \cos \varphi \Rightarrow x = (2+15) \cos(63,43^\circ)$$

$$\Rightarrow x = 4,89$$

$$y = \rho \sin \varphi \Rightarrow y = (2+15) \sin(63,43^\circ) \Rightarrow y = 3,78$$

$$\text{on a donc } \boxed{P(4,89; 3,78; 2)}$$

* Base sphérique $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\varphi)$ $P(r; \theta, \varphi)$ $\varphi = 63,43^\circ$

$$z = r \cos \theta \quad \text{avec } r = \sqrt{(4,89)^2 + (3,78)^2 + 4} \Rightarrow \underline{r = 4,68}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{4,68}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{4,68}\right) \Rightarrow \underline{\theta = 64,7^\circ}$$

on a donc $P(4,68; 64,7; 63,43)$

B) A de coordonnées sphériques $r = 2; \varphi = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{6}$

1) Coordonnées cylindriques $(\rho; \varphi; z)$ de A.

$$\rho = r \sin \theta \Rightarrow \rho = 2 \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \rho = 1 \quad \cdot \quad z = r \cos \theta \Rightarrow z = 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \\ \Rightarrow z = \sqrt{3}.$$

donc on a: $A(1; \frac{\pi}{3}; \sqrt{3})$

* Coordonnées cartésiennes (x, y, z) de A.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \Rightarrow x = \cos \frac{\pi}{3} \\ y = \rho \sin \varphi \Rightarrow y = \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ et } z = \sqrt{3}$$

donc on a: $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3})$

② Déterminons les coordonnées cartésiennes de A.

$\theta = 15 \text{ tours/minutes}$. on a:

A' position de A au bout de 2 secondes. Déterminons les coordonnées cartésiennes.

$\theta = 15 \text{ tours/min} \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} \text{ trs/s}$. Ainsi le point A fait $\frac{1}{2}$ trs en 2 secondes. Donc A' est symétrique de A par rapport à

l'origine. Ainsi $A'(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3})$

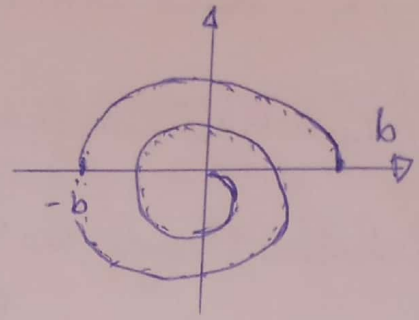
Exercice n°3

Données: $\rho = b e^{\frac{t}{t_0}}, \varphi = \omega t$

1) Écrivons l'équation polaire de C(0)

$$\rho = b e^{-\frac{t}{t_0}} \text{ or } \varphi = \omega t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega}$$

$$\text{donc } \rho = b e^{-\frac{\varphi}{\omega t_0}} \Rightarrow \boxed{\rho = b e^{-\frac{\varphi}{\omega t_0}}}$$



Traçons succinctement.

② calculons $\vec{v}(A/R_0)$ et $\vec{\gamma}(A/R_0)$

$$\text{* en cr: } \vec{v}(A/R_0) = \left. \frac{d\vec{on}}{dt} \right|_{R_0} \Rightarrow \vec{v}(A/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\varphi)}$$

$$\rho = b e^{-\frac{t}{t_0}} \Rightarrow \dot{\rho} = -\frac{b}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}}$$

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega$$

$$\text{donc } \vec{v}(A/R_0) = -\frac{b}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} \vec{e}_\rho + b e^{-\frac{t}{t_0}} \omega \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{v}(A/R_0) = b e^{-\frac{t}{t_0}} \left(-\frac{1}{t_0} \vec{e}_\rho + \omega \vec{e}_\varphi \right)}$$

* $\vec{\gamma}(A/R_0)$

$$\vec{\gamma}(A/R_0) = \left. \frac{d\vec{v}(A/R_0)}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}(A/R_0) = \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\varphi)}$$

$$\text{* } \ddot{\rho} = -\frac{b}{t_0^2} e^{-\frac{t}{t_0}} \Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{b}{t_0^2} e^{-\frac{t}{t_0}}$$

$$\text{* } \rho \dot{\varphi}^2 = \text{donc } \vec{\gamma}(M/R) = \left(\frac{b}{t_0^2} e^{-\frac{t}{t_0}} - b \omega^2 e^{-\frac{t}{t_0}} \right) \vec{e}_\rho + \left(-\frac{2b\omega}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = b e^{-\frac{t}{t_0}} \left(\frac{1}{t_0^2} - \omega^2 \right) \vec{e}_\rho - \frac{2b}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} \omega \vec{e}_\varphi$$

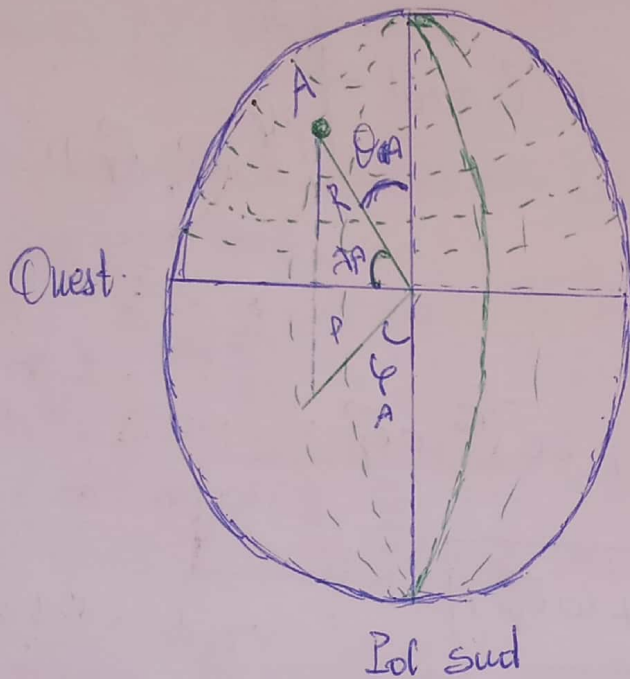
$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = b e^{-\frac{t}{t_0}} \begin{vmatrix} \frac{1}{t_0^2} - \omega^2 \\ -\frac{2\omega}{t_0} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\varphi)}}$$

Exercice n° 16

Factor / $\lambda_A = 14,05$ latitude nord
 $\varphi_A = 0,26^\circ$ longitude Ouest

Géométrie / $\lambda_B = 10,18^\circ$ latitude Nord
 $\varphi_B = 3,12$ longitude Ouest

① Calculons l'angle des Verticales passant respectivement par A et B.
 Pde Nord



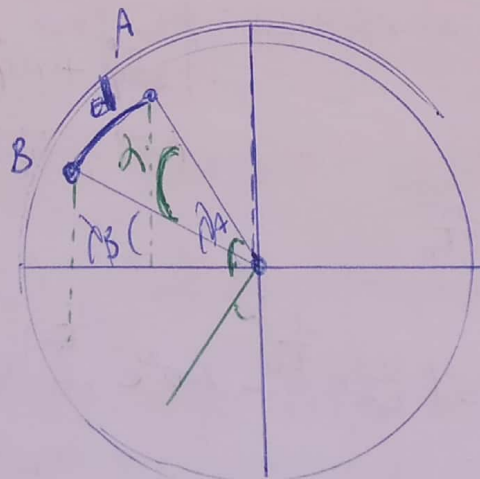
$$p = R \sin \theta$$

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{array} \right.$$

$$\frac{x^\circ}{180} = \frac{y(\text{rad})}{\pi} = \frac{3(\text{grad})}{200}$$



$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cos \lambda$$

$$\vec{OA} = \left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \varphi_A \\ y = R \sin \varphi_A \\ z = R \cos \theta_A \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{OA} = \left\{ \begin{array}{l} x = R \sin \theta_A \cos \varphi_A \\ y = R \sin \theta_A \sin \varphi_A \\ z = R \cos \theta_A \end{array} \right.$$

avec $\theta_A = \frac{\pi}{2} - \lambda_A$

$$\vec{OB} = \begin{cases} x = R \sin \varphi_B \cos \lambda_B \\ y = R \sin \varphi_B \sin \lambda_B \\ z = R \cos \varphi_B \end{cases} \quad \text{avec } \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \lambda_B$$

Qu'a: $\vec{OA} = \begin{cases} x = R \cos \varphi_A \sin(\frac{\pi}{2} - \lambda_A) \\ y = R \sin \varphi_A \sin(\frac{\pi}{2} - \lambda_A) \\ z = R \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda_A) \end{cases} \Rightarrow \vec{OA} = \begin{cases} x = R \cos \varphi_A \cos \lambda_A \\ y = R \sin \varphi_A \cos \lambda_A \\ z = R \sin \lambda_A \end{cases}$

Aussi $\vec{OB} = \begin{cases} x = R \cos \varphi_B \cos \lambda_B \\ y = R \sin \varphi_B \cos \lambda_B \\ z = R \sin \lambda_B \end{cases}$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \begin{cases} x' + R^2 \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_A \cos \lambda_B \\ y' + R^2 \sin \varphi_A \sin \varphi_B \cos \lambda_A \cos \lambda_B \\ z' + R^2 \sin \lambda_A \sin \lambda_B \end{cases}$$

$$\|\vec{OA}\| = R \text{ et } \|\vec{OB}\| = R \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{R^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = (\cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_A \cos \lambda_B) + (\sin \varphi_A \sin \varphi_B \cos \lambda_A \cos \lambda_B) + \sin \lambda_A \sin \lambda_B$$

$$= \cos \lambda_A \cos \lambda_B (\cos \varphi_A \cos \varphi_B + \sin \varphi_A \sin \varphi_B) + \sin \lambda_A \sin \lambda_B$$

$$\boxed{\cos \alpha = \cos \lambda_A \cos \lambda_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) + \sin \lambda_A \sin \lambda_B}$$

AN: $\alpha = \cos^{-1}(\cos(14,05) \cos(10,18) \cos(2,86) + \sin(14,05) \sin(10,18))$

$$\boxed{\alpha = 4,77^\circ}$$

② Déduisons la distance séparant ces deux localités.

$$d = R \cdot \alpha \quad \alpha(\text{rad}) = \frac{4,77 \pi}{180}$$

$$d = R \times \alpha(\text{rad})$$

AN: $d = 64 \cdot 10^2 \times \frac{4,77 \pi}{180}$

$$\boxed{d = 532,81 \text{ km}}$$

Exercice n° 12

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \theta)$$

① a) Exprimons en fonction de l'angle θ l'abs-cisse curviligne s du mobile.

$$ds = |d\vec{OA'}| \quad \text{or} \quad \vec{OA'} = \rho \vec{e_\rho}$$

$$\begin{aligned} \vec{OA'} = \rho \vec{e_\rho} \Rightarrow d\vec{OA'} &= d\rho \vec{e_\rho} + \rho d\vec{e_\rho} \\ &= d\rho \vec{e_\rho} + \rho \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} d\theta \\ &= d\rho \vec{e_\rho} + \rho d\vec{e_\theta} \end{aligned}$$

$$\text{on a: } ds = |d\vec{OA'}| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \theta) \Rightarrow d\rho = -\frac{1}{2} \rho_0 \sin \theta d\theta$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \rho_0 d\theta\right)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + 2\cos \theta)}$$

$$ds = \frac{1}{2} \rho_0 d\theta \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$ds = \frac{1}{2} \rho_0 d\theta \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow ds = \frac{1}{2} \rho_0 \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\Rightarrow s = \int_0^\theta \frac{1}{2} \rho_0 \cos \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\Rightarrow s = 2 \rho_0 \left[\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{s = 2 \rho_0 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{A Pour } s = \rho_0 \text{ on a: } 2 \rho_0 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) = \rho_0 \Rightarrow 2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

⑥ Deduisons le périmètre de la trajectoire.

$$\frac{P}{2} = \int_0^{\pi} ds \Rightarrow \frac{P}{2} = \int_0^{\pi} \rho_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2} = 2\rho_0 \left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2} = 2\rho_0 \Rightarrow \boxed{P = 4\rho_0}$$

② Exprimer la vitesse linéaire du mobile.

a) En fonction du temps.

on a: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \rho_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{dt}$

$\theta = \omega t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega$ donc $\boxed{v = \rho_0 \omega \cos\frac{\omega t}{2}}$

(b) En fonction de ρ .

on a: $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\theta)$

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \rho = \rho_0 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\omega t}{2} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

donc $v = \rho_0 \omega \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$ $\boxed{v = \omega \sqrt{\rho \rho_0}}$

3) a) Déterminons les composantes radiales et orthoradiales de l'accélération: γ_ρ et γ_θ . Ainsi que son module γ .

On a: $\vec{r} \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ $(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\theta)$

avec $\boxed{\gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2}$

$\boxed{\text{et } \gamma_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}}$

on a: $\dot{\rho} = -\frac{1}{2}\rho_0 \omega \sin\omega t \Rightarrow \ddot{\rho} = -\frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \cos\omega t$

$$\rho \ddot{\theta}^2 = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (1 + \cos \omega t)$$

$$\Rightarrow r_\rho = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \cos \omega t - \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (1 + \cos \omega t)$$

$$\Rightarrow r_\rho = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (\cos \omega t + \cos \omega t + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_\rho = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (1 + 2 \cos \omega t)}$$

$$r_\theta = 2 \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}$$

$$\text{on a : } r_\theta = 2 \left(-\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \sin \omega t \right) \quad \text{car } \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{donc } \boxed{r_\theta = -\rho_0 \omega^2 \sin \omega t}$$

* Module de l'accélération r .

$$\text{on a : } r = \sqrt{r_\rho^2 + r_\theta^2}$$

$$\text{donc } r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (1 + 2 \cos \omega t) \right)^2 + \left(-\rho_0 \omega^2 \sin \omega t \right)^2}$$

$$r = \rho_0 \omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} (1 + 2 \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t}$$

$$= \rho_0 \omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \cos \omega t + \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}$$

$$\boxed{r = \rho_0 \omega^2 \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \omega t}}$$

b) Déterminons r_N

$$r^2 = r_T^2 + r_N^2 \Rightarrow r_\rho^2 + r_\theta^2 = r_T^2 + r_N^2$$

$$\Rightarrow r_N^2 = r_\rho^2 + r_\theta^2 - r_T^2$$

$$\text{avec } r_T = \frac{dv}{dt}$$

$$r_T = \frac{dv}{dt} \left(\rho_0 \omega \cos \frac{\omega t}{2} \right) \Rightarrow r_T = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}$$

donc Ainsi : $r_N = \sqrt{(\rho\omega^2)^2 \left(\frac{5}{4} + \cos\omega t\right) - \left(-\frac{1}{2}\rho\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}\right)^2}$

$$r_N = \rho\omega^2 \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\omega t - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$r_N = \rho\omega^2 \sqrt{\frac{5}{4} + \cos^2\frac{\omega t}{2} - \sin^2\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$= \rho\omega^2 \sqrt{\frac{5}{4} + \cos^2\frac{\omega t}{2} - \frac{5}{4}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$= \rho\omega^2 \sqrt{\frac{5}{4}\cos^2\frac{\omega t}{2} + \cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

donc

$$= \rho\omega^2 \sqrt{\frac{9}{4}\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

donc

$$r_N = \frac{3}{2}\rho\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}$$

e) Deduisons le rayon de la courbure R_c .

on a: $r_N = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{r_N}$

$$\Rightarrow R_c = \frac{(\rho\omega \cos\frac{\omega t}{2})^2}{\frac{3}{2}\rho\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}}$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{2}{3}\rho \cos\frac{\omega t}{2}$$

4) Calculons $\omega t = 0$. En A: $\theta = 0 \Rightarrow \omega t = 0$ En B: $\theta = \pi/3$

À l'instant B

$$R_c = \frac{2}{3} \times 0,5 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

AN: $v = 0,5 \times 3,12 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$r = 0,5 \times (3,12)^2 \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_c = 0,33 \text{ m} \\ v = 1,59 \text{ m/s} \\ r = 7,68 \text{ m/s}^2 \end{array} \right.$$

Exercice n°13

1) $V_0 = 20 \text{ m/s}$ $\vec{r} = -kV^n \vec{r}$

Pour $n=1$

a) Exprimons en fonction de V_0, k .

$$\vec{r} = -kV \vec{r} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -kV$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -k dt$$

$$\Rightarrow \ln V = -kt + c$$

$$V(t) = ce^{-kt}$$

à $t=0$; $V_0 = c$ donc

$$V(t) = V_0 e^{-kt}$$

* La position $x(t)$

$$V = V_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = V_0 e^{-kt}$$

$$\Rightarrow dx = V_0 e^{-kt} dt$$

$$\Rightarrow x = -\frac{V_0}{k} e^{-kt} + c, c \in \mathbb{R}$$

à $t=0$; $x=0 \Rightarrow c = +\frac{V_0}{k}$

$$\text{donc } x(t) = \frac{V_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

* La vitesse en fonction de x

$$x = \frac{V_0}{k} (1 - e^{-kt}) \Rightarrow kx = V_0 (1 - e^{-kt})$$

$$\Rightarrow V_0 - V_0 e^{-kt} = kx$$

$$\Rightarrow V_0 e^{-kt} = V_0 - kx$$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 - kx$$

Pour $n=2$ on $\vec{r} = -kV^2 \vec{r}$.

$$\frac{dV}{dt} = -kV^2 \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = -k dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{V} = -kt + c$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{kt + c}$$

à $t=0$; $V_0 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{V_0}$

$$\text{donc } V = \frac{1}{kt + \frac{1}{V_0}} \Rightarrow V = \frac{V_0}{V_0 kt + 1}$$

$$\text{donc } V(t) = \frac{V_0}{V_0 kt + 1}$$

* La position $x(t)$

$$V(t) = \frac{V_0}{V_0 kt + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{V_0}{V_0 kt + 1}$$

$$\Rightarrow dx(t) = \frac{V_0 dt}{V_0 kt + 1}$$

$$\Rightarrow x(t) = V_0 \int \frac{1}{V_0 kt + 1} dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{V_0 k} \times V_0 \ln(V_0 kt + 1) + c$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \ln(V_0 kt + 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

à $t=0$; $x=0 \Rightarrow c=0$

$$x(t) = \frac{1}{k} \ln(V_0 kt + 1)$$

* La vitesse en fonction de $x(t)$

$$x = \frac{1}{k} \ln(v_0 kt + 1)$$

$$\Rightarrow kx = \ln(v_0 kt + 1)$$

$$\Rightarrow e^{kx} = v_0 kt + 1$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{v_0}{e^{kx}} \Rightarrow v(x) = v_0 e^{-kx}$$

• Pour $n = 4$

* Expressions de $v = f(v_0, k)$.

$$\text{on a : } \vec{r} = -kv^4 \vec{e}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^4 \Rightarrow \frac{dv}{v^4} = -k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v^4} = - \int k dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3v^3} = -kt + C$$

$$\Rightarrow 3v^3 = \frac{1}{kt + C}, C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v^3 = \frac{1}{3kt + 3C}$$

$$\Rightarrow v^3 = \frac{1}{3kt + C_1}, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{1}{3kt + C_1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{à } t=0; \text{ on a : } v_0 = v \Rightarrow \frac{1}{C_1} = v_0^3$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{v_0^3}$$

$$\text{done } v = \left(\frac{v_0^3}{3v_0^3 kt + 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

done

$$v = v_0 (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

A la position :

$$v = v_0 \left(\frac{1}{3v_0^3 kt + 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = v_0 (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow dx = v_0 (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}} dt$$

$$\Rightarrow x = \int v_0 (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}} dt$$

$$x = \int v_0 \times \frac{1}{3v_0^3 k} \times 3v_0^3 k (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}} dt$$

$$x = \frac{1}{3v_0^2 k} \int 3v_0^3 k (3v_0^3 kt + 1)^{-\frac{1}{3}} dt$$

$$= \frac{1}{3v_0^2 k} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}} (3v_0^3 kt + 1)^{1-\frac{1}{3}} \right] + C$$

$$x = \frac{1}{3v_0^2 k} \left[\frac{3}{2} (3v_0^3 kt + 1)^{\frac{2}{3}} \right] + C$$

$$x = \frac{1}{2v_0^2 k} (3v_0^3 kt + 1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$\text{à } t=0; x=0 \text{ donc } C = \frac{-1}{2v_0^2 k}$$

$$x = \frac{1}{2v_0^2 k} \left[(3v_0^3 kt + 1)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]$$

* L'expression de v en fonction de $x(t)$

$$v(t) = \frac{1}{2V_0^2 k} \left[(3V_0^3 k t + 1)^{2/3} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow 2V_0^2 k x = (3V_0^3 k t + 1)^{2/3} - 1$$

$$\Rightarrow 2V_0^2 k x + 1 = (3V_0^3 k t + 1)^{2/3}$$

$$\Rightarrow (2V_0^2 k x + 1)^{3/2} = (3V_0^3 k t + 1)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{V_0}{(2V_0^2 k x + 1)^{1/2}}$$

$$\text{donc } \boxed{v(x) = V_0 (2V_0^2 k x + 1)^{-1/2}}$$

① $x = 150 \text{ m}$; $|a| = 2 \text{ m/s}^2$

$$\vec{a} = -k v^n \vec{v}$$

Pour $n = 1$; $\vec{a} = -k v \vec{v}$

$$|a| = k v \Rightarrow k = \frac{|a|}{v}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{20} \Rightarrow \boxed{k = 10^{-2}}$$

• $v = V_0 - k x$

$$\Rightarrow v = 20 - 10^{-2} \times 150$$

$$\boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

$$v = V_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{V_0}{V_0} = e^{-kt}$$

$$\Rightarrow -kt = \ln \frac{v}{V_0}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{k} \ln \frac{V_0}{v}$$

$$\text{AN: } t = \frac{1}{10^{-2}} \ln \frac{20}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 13,86 \text{ s}}$$

• Pour $n = 2$

$$\vec{a} = -k v^2 \vec{v}$$

$$|a| = k v^2 \Rightarrow k = \frac{|a|}{v^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{20^2}$$

Donnons la loi $v(x)$.

Pour $n=2$

$$\gamma = -kx^{-2} = -\frac{k}{x^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{dt} \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow v \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{-k}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = -k \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \left[\frac{k}{x} \right]_{x_0}^x$$

$$\Rightarrow v^2 = 2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}$$

$$\text{Ainsi : } v(x) = \sqrt{2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}$$

Pour $n=4$

$$\gamma = -kx^{-4}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{x^4} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{dt} \frac{dx}{x^4}$$

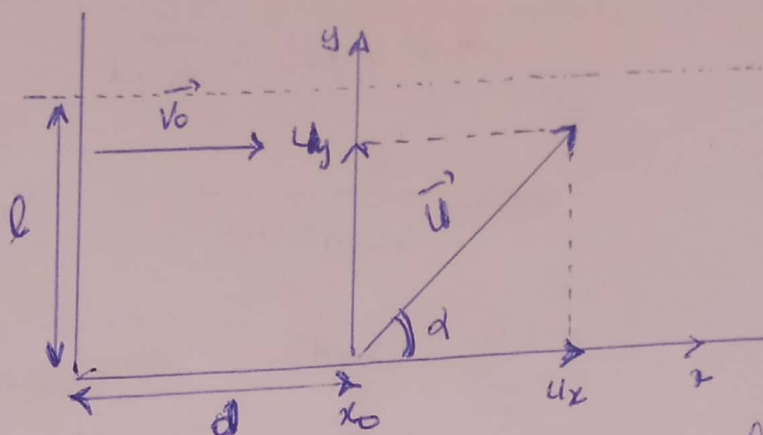
$$\Rightarrow v \frac{dv}{dt} = \left[\frac{1}{3} \frac{k}{x^3} \right]_{x_0}^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)$$

$$\Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x_0^3} \right)}$$

Exercice n° 14



Calculons en fonction de d à laquelle se trouve initialement la voiture, la direction optimale du mouvement du piéton, i.e. la direction qui lui permet de traverser sans risque de collision et avec une vitesse u la plus faible possible.

* Equation horaire de la position du piéton.

$$\begin{cases} x_p(t) = ut \\ y_p(t) = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p(t) = ut \cos \alpha \\ y_p(t) = ut \sin \alpha \end{cases}$$

* Equation horaire de la position

$$\begin{cases} x_v(t) = v_0 t - d \\ y_v(t) = 0 \end{cases}$$

Pour qu'il n'y ait pas de collision, il faut que

$$x_v(t_c) < x_p(t_c)$$

$$\text{On a: } \tan \alpha = \frac{e}{x_p} \Rightarrow x_p = \frac{e}{\tan \alpha} \\ \Rightarrow u \cos \alpha t_c = \frac{e}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow t_c = \frac{e}{u \cos \alpha \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow t_c = \frac{e}{u \sin \alpha}$$

$$x_p < x_p \Rightarrow u \cos \alpha \frac{e}{u \sin \alpha} > V_0 \frac{e}{u \sin \alpha} - d$$

$$\Rightarrow \frac{e}{\tan \alpha} > \frac{V_0 e}{u \sin \alpha} - d$$

$$\Rightarrow \frac{V_0 e}{u \sin \alpha} < \frac{e}{\tan \alpha} + d$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{u \sin \alpha} < \frac{u \cos \alpha}{u \sin \alpha} + \frac{u d \sin \alpha}{u \sin \alpha}$$

$$V_0 < u \cos \alpha + u d \sin \alpha$$

$$\Rightarrow u (\cos \alpha + d \sin \alpha) > V_0$$

$$\Rightarrow u > \frac{V_0}{\cos \alpha + d \sin \alpha}$$

$$u \text{ est optimal } \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} (\cos \alpha + d \sin \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin \alpha + d \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = d \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{d}{1}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_0 = \frac{d}{e}$$

on a;

$$u_{op} = \frac{V_0 e}{e \cos \alpha_0 (1 + \frac{d}{e} \tan \alpha_0)}$$

$$u_{op} = \frac{V_0}{\cos \alpha_0 (1 + \tan^2 \alpha_0)}$$

$$\text{On a: } 1 + \tan^2 \alpha_0 = \frac{1}{\cos^2 \alpha_0}$$

$$u_{op} = \frac{V_0}{\cos \alpha_0 (\frac{1}{\cos^2 \alpha_0})} = V_0 \cos \alpha_0$$

$$u_{op} = V_0 \cos \alpha_0$$

$$1 + \tan^2 \alpha_0 = 1 + \left(\frac{d}{e}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha_0}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{e}\right)^2}}$$

done

$$u_{op} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{e^2}}}$$

Travaux dirigés N° 2 de Mécanique du point

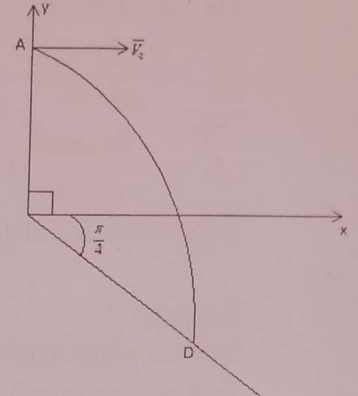
Exercice 1

Un skieur quitte en A l'extrémité d'un tremplin de saut avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0 = V_0 \cdot \vec{e}_{x_0}$. Il retombe en D sur la piste de réception inclinée à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à

l'horizontale. On note $\vec{OA} = h \cdot \vec{e}_{y_0}$.

Déterminer la longueur du saut OD ainsi que la durée de ce saut dans les cas suivants :

- La résistance de l'air est négligée.
- La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et pour un skieur de masse m, elle s'écrit $\vec{F} = -k \cdot m \cdot \vec{V}$. A.N. $k = 0,4$, $V_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$, $h = 8 \text{ m}$.



Exercice 2

Une fusée est lancée verticalement et n'est soumise qu'à l'action de la pesanteur. A l'instant initial, sa masse est m_0 et sa vitesse est nulle. Les gaz sont éjectés avec $\vec{u}$ par rapport à la fusée également verticale avec un débit massique constant.

- Trouver l'équation différentielle permettant de calculer la valeur v de la vitesse de la fusée par rapport à un référentiel terrestre supposé galiléen.
- Calculer v à un instant t.
- Calculer la distance parcourue par la fusée à un instant t.
- La masse du carburant étant m, trouver la vitesse et la distance parcourue lorsque la combustion s'arrête.

Exercice 3

On considère un repère (Ox, Oy) (qu'on supposera galiléen), Ox étant horizontal, Oy vertical. A l'instant initial et de l'origine O, on lance des points matériels M, ayant tous la même masse, dont les vitesses initiales ont toutes la même valeur v_0 , les vecteurs vitesse initiales $\vec{v}_{0i}$ étant tous contenus dans le plan xOy et ayant des orientations différentes. Ces points matériels sont soumis outre leur poids à des forces de frottement fluide $-k\vec{v}$, le coefficient étant le même pour tous les points. Montrer qu'à un instant t donné tous les points M, sont situés sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 4

Une particule M de masse m, est soumise à une force centrale de la forme $\vec{F} = \left(\frac{k}{\rho^n} \right) \cdot \vec{e}_\rho$ où k et n

sont des constantes. Elle est initialement immobile pour $\rho = \rho_0$ et sa vitesse pour $\rho = 0$ est V_0 .

- Déterminer les conditions sur k et n pour que l'énergie mécanique de M soit conservée.
- Calculer la valeur de V_0

Exercice 5

Une particule M de masse m est soumise à une force centrale dérivant d'une énergie potentielle :

$$U(r) = -\frac{k}{r}. \text{ On pose : } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{OM}}, \vec{p} = m\vec{v}, \vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

- Montrer que $\vec{\sigma}_o$ est constant. Qu'en déduit-on quant à la trajectoire de M.

- 2) Montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{\sigma}_o - mk \vec{r}/k$ est une constante du mouvement.
- 3) Calculer $\vec{A}$ pour une trajectoire circulaire autour de O.

Exercice 6

On considère un champ de forces planes d'équation polaires :

$$f_r = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

$$f_\theta = -\frac{2r \sin \theta}{\cos^3 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

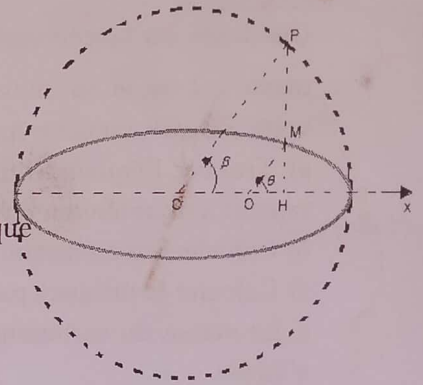
Déterminer la fonction de forces dont dérive ce champ de forces.

Exercice 7

Soit un point matériel décrivant une orbite elliptique d'excentricité e , de grand axe $2a$ et de foyer O. Soit une position M du point matériel. Soit le cercle de centre O', centre de l'ellipse et de rayon a . Soit P le point de ce cercle situé sur la perpendiculaire au grand axe passant par M.

Soit $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ et $\beta = (\vec{O'x}, \vec{O'P})$

- a) Trouver une relation entre β , θ et e .
- b) Exprimer la vitesse de M en fonction de β , e , k , m et a .
- c) Trouver les points de la trajectoire dont la vitesse est la moyenne géométrique des vitesses à l'apogée et au périégée.



Exercice 8

On considère une particule qui se déplace dans le champ de forces.

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y - 2x)\vec{j}$$

Où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs unitaires du repère cartésien plan Oxy.

- 1) Calculer le travail reçu par la particule en fonction de a .
 - a) Si elle se déplace en ligne droite du point O(0,0) au point A(2,4)
 - b) Si elle se déplace de O en A suivant le trajet OA'A (A' = projection de A sur Ox)
 - c) Si elle se déplace de O en A suivant le trajet OA''A (A'' = projection de A sur Oy)

Conclusion
- 2) Calculer en fonction de a le travail reçu par la particule qui effectue un tour le long du cercle centré en O, et de rayon 2 dans le sens trigonométrique.
- 3) Pour quelle valeur de a le champ de force $\vec{F}$ dérive-t-il d'une énergie potentielle V ? Déterminer $V(x, y)$. Que peut-on alors dire des travaux calculés précédemment?

Exercice 9

Une particule de masse m décrit la trajectoire elliptique d'excentricité e , de demi-axes a et b , de centre O, d'équation

$$\vec{OM} = (a \cos \omega t)\vec{i} + (b \sin \omega t)\vec{j}$$

Où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent des vecteurs unitaires dans le repère cartésien Oxy orthonormé

- 1) a) Montrer que la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur M, dérive d'une énergie potentielle E_p qu'on déterminera en fonction de m , ω et $r = |\vec{OM}|$
- b) En déduire le travail de $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace de M_1 ($OM_1 = r_1$) vers M_2 ($OM_2 = r_2$)

2) a) Calculer le rapport des énergies cinétiques de la particule en A et B, en fonction de l'excentricité de la trajectoire.

b) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B

3) a) Vérifier le principe de conservation de l'énergie mécanique totale de la particule.

b) En déduire la position de M et les instants où l'énergie se répartit en quantités égales sous forme cinétique et sous forme potentielle.

Exercice 10

Une planète P est repérée par rapport au soleil, par les coordonnées polaires r et θ . L'énergie potentielle gravitationnelle (attractive) entre la planète P de masse m et le soleil de masse M , est $V(r) = K/r$ ($K = GMm = \text{Cte positive}$). On désigne par σ le moment cinétique de la planète par rapport au soleil et par E son énergie totale.

1) Etablir l'équation différentielle liant $u = 1/r$ et l'angle polaire θ

2) En déduire

a) l'équation de la trajectoire de la planète P, relativement au soleil ;

b) la relation entre la période du mouvement de P et l'énergie E , ainsi que la 3^e loi de Kepler.

3) *Application* : a) Mesure de la masse d'une planète : La planète Mars de masse m , décrit autour du soleil, de masse M , une ellipse de demi-grand axe avec $a = 230$ millions de km, en 1,88 année. Le satellite Deimos de masse m' décrit autour de la planète Mars une ellipse de demi-grand axe $a' = 23\,000$ km en 30 h. Déterminer la masse de la planète Mars. On donne $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg et $M \gg m \gg m'$

b) Rencontre de deux particules : Une particule se déplace sur orbite circulaire avec une période T , autour d'une autre particule sous l'influence de forces gravitationnelles. Le mouvement est brutalement arrêté ; au bout du temps t , les particules se heurteront. Calculer le rapport t/T

Exercice 11

1) Une comète décrit une orbite elliptique du soleil qui occupe un foyer de l'ellipse, avec une période $T = 11,5$ années. La distance du périhélie au soleil est $r_p = 0,2 \mu.A.$ (l'unité astronomique $\mu.A.$, a pour valeur la distance moyenne de la terre au soleil, soit 150 millions de km).

Calculer

a) la distance r_A de l'apogée au soleil

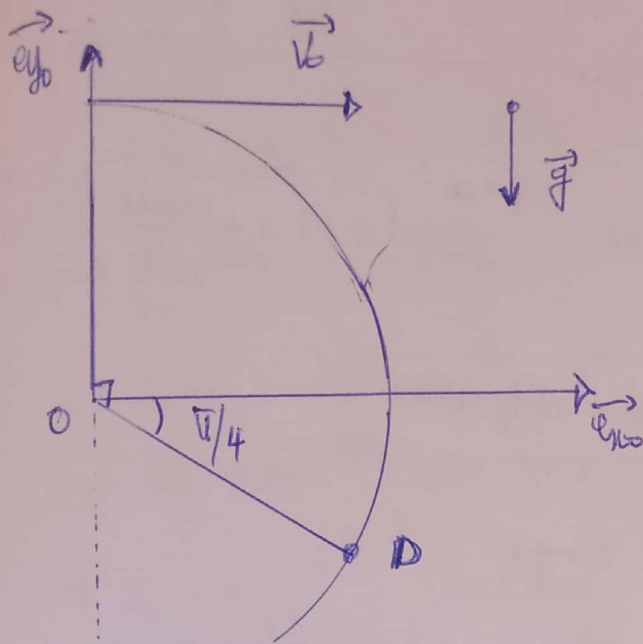
b) l'excentricité de la trajectoire elliptique

On donne période du mouvement de la terre autour du soleil $T_0 = 1$ an.

2) La trajectoire de la comète est pratiquement confondue avec une parabole. Comparer la vitesse v_p de la comète au périhélie, à la vitesse v_0 de translation de la terre autour du soleil

Lundi le 06 février 2023

CORRECTION TD N°2 . MECANIQUE DU POINT MATERIELS.



$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_{x0}$$

$$\vec{OA} = h \vec{e}_{y0}$$

Déterminons la longueur du saut OS et la durée de ce saut

a) La résistance de l'air est négligée.

Système : { skieur }.

Referentiel terrestre supposé Galiléen
Bilan des forces

- Le poids $\vec{P}$ du skieur

Déterminons les équations horaires du mouvement.

Appliquons la RFD.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a} = \text{cte}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OG}_0$$

à $t=0$ on a :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix} ; \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG}_0 \begin{pmatrix} OG_{0x} = 0 \\ OG_{0y} = h \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \begin{cases} x(t) = v_0 t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h & (2) \end{cases}$$

Déterminons l'équation cartésienne de la trajectoire.

$$\text{on a : } x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 + h$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$$

L'équation de la piste de réception est $y_p = -x$

$$\text{Au point D on a : } y = y_D = -x_D$$

$$\text{donc } y_D = -x_D \Rightarrow \frac{-g}{2v_0^2} x^2 + h = -x_D$$

$$\Rightarrow \frac{-g}{2v_0^2} x^2 + x_D + h = 0$$

Resolvons l'equation

$$\frac{-g}{2V_0^2} x_D^2 + x_D + h = 0$$

on a: $\Delta = 1 + 4\left(\frac{g}{2V_0^2}\right)h$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{1 + 4\left(\frac{g}{2V_0^2}\right)h}$$

on a:

$$x_{D1} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\left(\frac{g}{2V_0^2}\right)h}}{2\left(\frac{-g}{2V_0^2}\right)}$$

$$x_{D1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{g}{2V_0^2}\right)h}}{\frac{g}{V_0^2}}$$

$$x_{D1} = \frac{V_0^2}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2}} \right]$$

$$x_{D2} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2}}}{\frac{g}{V_0^2}}$$

$$\Rightarrow x_{D2} = \frac{V_0^2}{g} \left(-\sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2}} + 1 \right)$$

x_{D1} est l'abscisse du point D.

AN: ~~x_{D1}~~ $y_D = -x_D$

$$\Rightarrow OD^2 = x_D^2 + y_D^2 = 2x_D^2$$

$$\Rightarrow OD = \sqrt{2} x_D$$

donc

$$OD = \frac{\sqrt{2} V_0^2}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2}} \right]$$

AN: $OD = \frac{\sqrt{2} \times 25^2}{10} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 10 \times 8}{25^2}} \right]$

$$OD = 187,45 \text{ m}$$

Le temps.

$$x_D = V_0 t_D \Rightarrow t_D = \frac{x_D}{V_0}$$

$$t_D = \frac{OD}{\sqrt{2} V_0}$$

AN: $t_D = \frac{187,45}{\sqrt{2} \times 25}$

$$t_D = 5,3 \text{ s}$$

b) La resistance de l'air est proportionnelle a la vitesse et pour un skieur de masse m , elle s'ecrit

$$\vec{F} = -km\vec{v}$$

Appliquons la RFD

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} - km\vec{v} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{g} - k\vec{v} = \vec{a}$$

Projection sur l'axe ox et oy

$$\vec{a} \begin{cases} ax = -kv_x \\ ay = -g - kv_y \end{cases}$$

$$ax = -kv_x \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_x} dv_x = -k dt$$

$$\Rightarrow \ln v_x = -kt + C$$

$$\Rightarrow v_x = \lambda e^{-kt} \text{ avec } \lambda = e^C$$

$$\Rightarrow \underline{v_x = v_0 e^{-kt}} \quad A, t=0, \lambda = v_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\Rightarrow x = \int v_x dt$$

$$\Rightarrow x = \int v_0 e^{-kt} dt$$

$$\Rightarrow x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C$$

$$A, t=0, x=0 \Rightarrow C = \frac{v_0}{k} e^{-kt}$$

$$\Rightarrow C = \frac{v_0}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})}$$

$$ay = -g - kv_y$$

$$\Rightarrow ay = \frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{dv_y}{dt} + kv_y = -g}$$

C'est une équation de premier ordre avec second membre.

• solution homogène

$$\frac{dv_y}{dt} + kv_y = 0 \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -kv_y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_y} dv_y = -k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v_y} dv_y = -k \int dt$$

$$\Rightarrow \underline{v_y = r e^{-kt}} \text{ avec } r \in \mathbb{R}$$

• solution particulière
soit v_{yp} la solution particulière

$$\text{tel que } v_{yp} = C$$

on a donc

$$Ck = -g \Rightarrow C = -\frac{g}{k}$$

$$\text{Ainsi on a: } v_y = r e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$A, t=0, v_y = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{g}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{v_y = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1)}$$

$$* v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt$$

$$\Rightarrow dy = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1) dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \frac{g}{k} \int (e^{-kt} - 1) dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \frac{g}{k} \int e^{-kt} dt - g \int dt$$

$$\text{On a: } y = -\frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + c$$

$$\text{à } t=0: \text{ on a: } y=h$$

$$y=h \Rightarrow -\frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + c = h$$

$$\Rightarrow c = \frac{g}{k^2} e^{-kt} + h$$

$$y = \frac{g}{k^2} (-e^{-kt}) - \frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2} + h$$

$$\Rightarrow y = \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t + h$$

donc l'équation de la position est donnée par.

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \\ y = \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t + h \end{cases}$$

Au point D ; $y_D = -x_D$.

$$\frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt_D}) - \frac{g}{k} t_D + h = -\frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt_D})$$

$$\Rightarrow \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt_D}) - \frac{g}{k} t_D + h + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt_D}) = 0$$

$$\text{Posons } f(t_D) = e^{-kt_D}$$

En appliquant le développement limité au voisinage de 1 en t_D on obtient.

$$f(t_D) = f(t_0) + (t_D - t_0) f'(t_0)$$

$$t_D' = \frac{e^{-kt_D} \left(\frac{g}{k^2} + \frac{g}{k} t_D + \frac{v_0}{k} + v_0 t_D \right) - \frac{g}{k^2} - h - \frac{v_0}{k}}{\left(\frac{g}{k} + v_0 \right) e^{-kt_D} - \frac{g}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{k^2} e^{-kt_D} + \frac{g}{k} t_D e^{-kt_D} - \frac{g}{k^2} t_D e^{-kt_D} - \frac{g}{k} t_D e^{-kt_D} + h + \frac{v_0}{k} - \frac{v_0}{k} e^{-kt_D} + v_0 (t_D' - t_D) e^{-kt_D} = 0$$

$$e^{-kt_D} = e^{-kt_D} - k(t_D' - t_D) f'(t_D)$$

$$y_D + x_D = 0 \Rightarrow \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt_D}) + h + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt_D}) - \frac{g}{k} t_D' + h + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt_D}) = 0$$

$$\text{AN: } t'_s = e^{-0.4 \times 5.3} \left(\frac{10}{0.42} + \frac{10}{0.4} \times 5.3 + \frac{25}{94} + 25 \times 5.3 \right) - \frac{10}{942} - 8 - \frac{25}{0.4}$$

determining OB

$$\left(\frac{10}{94} + 25 \right) e^{-0.4 \times 5.3} - \frac{10}{0.4}$$

$$t'_s = 43.77 \text{ m}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{x_D}{OB} \Rightarrow OB = \sqrt{2} x_D$$

$$\text{AN: } OB = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt'_s})$$

$$\text{AN: } OB = \frac{25}{0.4} (1 - e^{-0.4 \times 4.5})$$

$$OB = 73.77 \text{ m}$$

$$t'_s = 41.5 \text{ s}$$

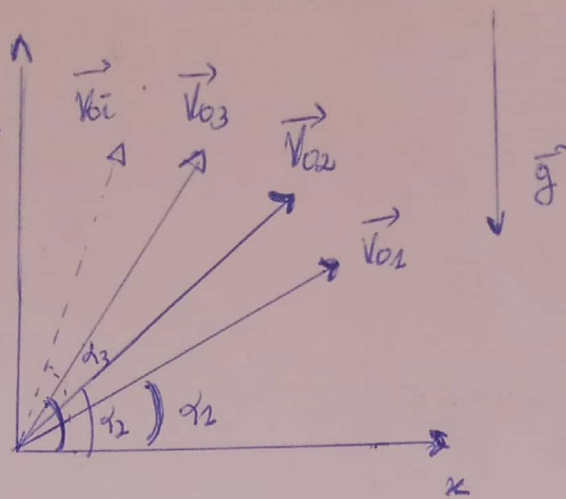
14/02/2023

Exercice n°3

Système: 3 points matériels de masse m
RTSG.

Bilans des forces

- Le poids $\vec{P}$
- Les Forces de frottements $\vec{F}$



d'après la RFS on a: $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{r}''$

$$= 0 \quad \vec{P}' + \vec{F}' = m \vec{r}''$$

$$\Rightarrow m \vec{g}' - k \vec{v}' = m \vec{r}''$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \vec{g}' - \frac{k}{m} \vec{v}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v}' - \vec{g}' = 0$$

• Projection sur l'axe (ox)

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \ln v_x = -\frac{k}{m} t + C$$

$$\Rightarrow v_x = e^C e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\Rightarrow v_x = C_1 e^{-\frac{k}{m} t}$$

A, $t=0$, $v_x = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0$

$$\Rightarrow v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\Rightarrow dx = v_0 e^{-\frac{k}{m} t} dt$$

$$\Rightarrow x = v_0 \left(-\frac{m}{k} \right) e^{-\frac{k}{m} t} + C_2$$

à $t=0$, $x=0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0 m}{k}$

donc

$$x = -v_0 \left(\frac{m}{k} \right) e^{-\frac{k}{m} t} + \frac{v_0 m}{k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0 m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$

• Projection sur l'axe (Oy)

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} v_y = -g$$

• Solution homogène

$$\frac{dv_y}{dt} - \frac{k}{m} v_y = 0 \Rightarrow \frac{dv_y}{v_y} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{v_y} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv_y}{v_y} = -\frac{k}{m} \int dt$$

$$\Rightarrow \ln v_y = -\frac{k}{m} t + C_3$$

$$\Rightarrow v_y = e^{C_3} e^{-\frac{k}{m} t} = e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$At t=0; v_y = v_{0y} \Rightarrow C_3 = v_{0y}$$

$$\Rightarrow v_y = v_{0y} e^{-\frac{k}{m} t}$$



* Solution particulière.

Soit $v_{yp} = A$ la solution particulière

$$\frac{dA}{dt} + \frac{k}{m} A = -g$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{k}{m} A = -g$$

$$\Rightarrow A = -\frac{mg}{k}$$

* solution générale:

$$v_y = \lambda e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k}$$

$$At t=0; v_y = v_{0y}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{mg}{k} + v_{0y}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k} + v_{0y} e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{mg}{k} (e^{-\frac{k}{m} t} - 1)$$

$$v_y = (v_{0y} + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow y = (v_{0y} + \frac{mg}{k}) (\frac{m}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mgt}{k} + C_4$$

$$At t=0; y=0$$

$$\Rightarrow C_4 = (v_{0y} + \frac{mg}{k}) (\frac{m}{k})$$

$$\Rightarrow y = -\frac{m}{k} (v_{0y} + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mgt}{k}$$

$$+ \frac{m}{k} (v_{0y} + \frac{mg}{k})$$

on a :

$$y = -\frac{m}{k} \left(v_{0y} + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mgb}{k} + \frac{m}{k} \left(v_{0y} + \frac{mg}{k} \right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{m}{k} \left(v_{0y} + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k}$$

$$\Rightarrow y = \frac{mv_{0y}}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + \frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k}$$

$$\Rightarrow \left[y - \left(\frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k} \right) \right] = \frac{mv_{0y}}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$\Rightarrow \left[y - \left(\frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k} \right) \right]^2 = \left[\frac{mv_{0y}}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \right]^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left[y - \left(\frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k} \right) \right]^2 = \left[\frac{m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \right]^2 (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + \left[y - \left(\frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k} \right) \right]^2 = \left[\frac{m v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \right]^2$$

Ainsi à l'instant t donné, tous les points M sont situés sur une cercle de centre $O : \left(\frac{m^2g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mgb}{k} \right)$ et rayon $\frac{m v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

Exercice n°4

$$\vec{F} = \left(\frac{k}{\rho^n} \right) \vec{e}_\rho \quad ; \quad \rho = \rho_0 \Rightarrow V = 0$$

$$\rho = 0 \Rightarrow V = V_0$$

a) Déterminons les conditions sur k et n pour que l'énergie mécanique soit de n soit conservée.

$$\text{on soit que } E_m = E_p + E_c$$

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{d\rho} \vec{e}_\rho$$

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{d\rho} \vec{e}_\rho = \left(\frac{k}{\rho^n} \right) \vec{e}_\rho$$

$$\frac{dE_p}{dp} = \frac{k}{\rho^n}$$

$$dE_p = -\frac{k}{\rho^n} d\rho$$

$$\Rightarrow E_p = - \int \frac{k}{\rho^n} d\rho$$

$$\Rightarrow E_p = -k \left(\frac{-1}{n-1} \rho^{\frac{1}{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{k}{n-1} \rho^{1-n} + C$$

avec $C=0$

$$\text{donc } E_p = \frac{k}{n-1} \rho^{1-n}$$

$$\bullet E(p=0) = \frac{k}{n-1} (0)^{1-n}$$

$$\Rightarrow E_p(p=0) = \frac{k}{n-1} (0)^{1-n} \text{ existe}$$

$$\text{Si } 1-n > 0 \Rightarrow n < 1$$

$$\bullet E_m = E_c + E_p$$

$$E_m(p=0) = E_m(p=p_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{k}{n-1} p_0^{1-n}$$

Cette expression est vraie pour $k < 0$

Conclusion: Pour que l'énergie mécanique (E_m) soit conservée, il faut que $n \leq 1$ et $k < 0$

b) calculons la valeur de v_0

$$\text{on a: } \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{k}{n-1} p_0^{1-n}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{2k}{m(n-1)} p_0^{1-n}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m(n-1)} p_0^{1-n}}$$

Exercice 6

On considère un champ de forces planes d'équation polaires.

$$f_r = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos 4\theta)$$

$$f_\theta = -\frac{2r \sin \theta}{\cos^3 \theta} (1 + \cos 4\theta)$$

Déterminons la fonction de force dont dérive ce champ de forces.

Soit U la fonction de force dont dérive ce champ.

$$\text{Posons } U = -E_p \Rightarrow E_p = -U$$

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p \Rightarrow \vec{F} = -\text{grad } (-U) \\ \Rightarrow \vec{F} = \text{grad } U$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F} = f_r \vec{e}_r + f_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} f_r = \frac{\partial u}{\partial r} & (*) \\ f_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & (*, *) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{du(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow u(\theta) = \text{cte}$$

donc

$$u = \left(\frac{1 + \cos^4 \theta}{\cos^3 \theta} \right) r^2 + \text{cte}$$

$$(*): \frac{\partial u}{\partial r} = f_r$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

$$\Rightarrow du = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta) dr$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta) dr$$

$$\Rightarrow u = \frac{2(1 + \cos^4 \theta)}{\cos^2 \theta} \frac{r^2}{2} + u(\theta)$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{1 + \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta} \right) r^2 + u(\theta)$$

Determinons $u(\theta)$

On a:

$$\frac{du}{d\theta} = \left[\frac{(-4 \sin \theta \cos^3 \theta) \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta (1 + \cos^4 \theta)}{\cos^4 \theta} \right] r^2 + \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

$$= \frac{2r^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} [-2 \cos^4 \theta + 1 + \cos^4 \theta] + \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2r^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} (1 - \cos^4 \theta) + \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{du}{d\theta} = \frac{2r \sin \theta}{\cos^3 \theta} (1 - \cos^4 \theta) + \frac{1}{r} \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

$$\Rightarrow f_\theta = \frac{-2r \sin \theta}{\cos^3 \theta} (-1 + \cos^4 \theta) + \frac{1}{r} \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

Exercice n°7

$$OH = r$$

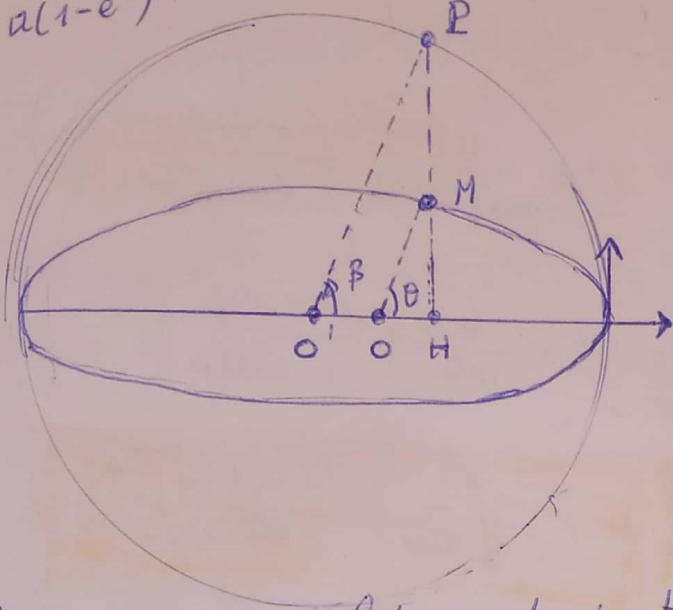
$$O'P = a$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\theta = (\vec{OX}, \vec{OH})$$

$$\beta = \vec{O'X}, \vec{O'P}$$

$$p = a(1-e^2)$$



a) Trouvons une relation entre β et θ

$$\text{on a: } \cos \beta = \frac{O'H}{a} \Rightarrow O'H = a \cos \beta$$

$$O'H = OO' + OH \Rightarrow O'H = c + r \cos \theta$$

$$\Rightarrow a \cos \beta = c + r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{c}{a} + \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$\text{on a: } r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } p = a(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \cos \beta = e + \frac{(1-e^2) \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{e + e^2 \cos \theta + \cos \theta - e^2 \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \beta = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}}$$

$$\text{En posant } t = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \text{ et}$$

$$t' = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ on a:}$$

$$\cos \beta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{1-t'^2}{1+t'^2}$$

ona:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{e + \frac{1-t'^2}{1+t'^2}}{1 + e \frac{1-t'^2}{1+t'^2}}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{e(1+t'^2) + (1-t'^2)}{(1+t'^2)}}{(1+t'^2) + e(1-t'^2)}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{e + et'^2 + 1 - t'^2}{1+t'^2 + e - et'^2}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{e+1 + (e-1)t'^2}{e+1 + (1-e)t'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{(e+1) \left[1 + \frac{e-1}{e+1} t'^2 \right]}{(e+1) \left[1 + \frac{1-e}{e+1} t'^2 \right]}$$

$$\Rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{1-e}{e+1} t'^2}{1 + \frac{1-e}{e+1} t'^2}$$

par identification on a:

$$t^2 = \frac{1-e}{e+1} t'^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{1-e}{e+1}} t'$$

$$\text{donc } \boxed{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{e+1}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

① Expressons la vitesse de M en fonction de β, e, k, m et a .

D'après la première loi de BINET

$$\text{on a: } v^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

$$\text{avec } u = \frac{1}{r} \Rightarrow u = \frac{1+e\cos\theta}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{p}$$

$$\Rightarrow v^2 = c^2 \left[\left(\frac{-e\sin\theta}{p} \right)^2 + \left(\frac{1+e\cos\theta}{p} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{c^2}{p^2} \left[e^2 \sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2 \cos^2\theta \right]$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{c}{p} \right)^2 (e^2 + 1 + 2e\cos\theta)$$

$$\text{On sait que } mc^2 = Pk \Rightarrow c^2 = \frac{Pk}{m}$$

$$\text{donc } v^2 = \left(\frac{Pk}{mp^2} \right) (e + 1 + 2e\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{ma(1-e^2)} (e + 1 + 2e\cos\theta)$$

$$\text{on a: } \cos\theta = \frac{e + \cos\theta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\Rightarrow (1 + e\cos\theta) \cos\theta = e + \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta (e\cos\theta - 1) = e - \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e - \cos\theta}{e\cos\theta - 1}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{ma(1-e^2)} \left(e^2 + 1 + \frac{2e(e - \cos\theta)}{e\cos\theta - 1} \right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{ma(1-e^2)} \left(\frac{e^2 \cos^2\theta - e^2 + e\cos\theta - 1 + e^2}{e\cos\theta - 1} \right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{ma(1-e^2)} \left[\frac{e\cos\theta(1-e^2) - (1-e^2)}{e\cos\theta - 1} \right]$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k(1-e^2)}{ma(1-e^2)} \left(\frac{-e\cos\theta - 1}{e\cos\theta - 1} \right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{ma} \left(\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta} \right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta} \right)}$$

II) Trouvons les points de la trajectoire dont la vitesse est la moyenne géométrique des vitesses à l'apogée et au périhélie.

$$\text{on a: } v = \sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta} \right)}$$

* Au périhélie on a $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)}$$

* A l'apogée ; $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$

$$\text{donc } v = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \times \sqrt{\frac{k}{ma} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{ma}}$$

Par identification on a ; $v = v$

$$\Rightarrow 1 - e \cos \beta = 1 + e \cos \beta$$

$$\Rightarrow -2e \cos \beta = 0$$

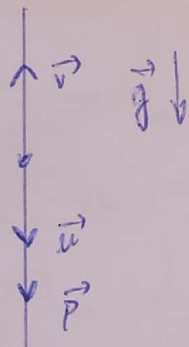
$$\Rightarrow \cos \beta = 0 \Rightarrow \beta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta = -\frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

$$\vec{a} \text{ à } t=0, m_0, v=0$$

a) Trouvons l'équation différentielle permettant de calculer la vitesse de la fusée par rapport à un référentiel terrestre supposé Galiléen.



Système { fusée de masse $m(t)$ }
RTSG

Bilan des forces

• $\vec{p}$ le poids de la fusée

Appliquons le RFD

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{r}$$

$$\vec{p} = m \vec{r} \Rightarrow m \vec{g} = m \vec{r}$$

$$\Rightarrow m \vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{or } \vec{p} = m \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g}$$

• à t quelconque on a :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

• à t+dt on a :

$$\vec{p} + d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{u} + \vec{v})$$

Notion de débit massique

$$m(t) = m_0 - at$$

$$\text{En effet : } q_m = \frac{m}{t} ; a = \frac{m'}{t}$$

$$\Rightarrow m' = at$$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 - m'$$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 - m'$$

$$\vec{p} + d\vec{p} = m \vec{v} + m d\vec{v} + dm \vec{v} + dm d\vec{v} - dm \vec{u} - dm \vec{v}$$

$$\vec{p} + d\vec{p} = m \vec{v} + m d\vec{v} - dm \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{p} + d\vec{p} - \vec{p} = m d\vec{v} - dm \vec{u}$$

$$\Rightarrow d\vec{p} = m d\vec{v} - dm \vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

$$\text{en a : } \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{g} \text{ et } \frac{dm}{dt} = -a$$

$$\text{donc } m \vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + a \vec{u}$$

$$-(m_0 - at)g = (m_0 - at) \frac{dv}{dt} + au$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + \frac{au}{m_0 - at}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{au}{m_0 - at} + g = 0$$

(b) Calculons v à un instant t .

On a :

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{au}{m_0 - at}$$

$$\Rightarrow \int dv = -g \int dt + \int \frac{au}{m_0 - at} dt$$

$$\Rightarrow v = -gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) + C$$

$$\Rightarrow v = -gt - u \ln(m_0 - at) + C$$

$$\text{à } t=0, v = v_0 = 0$$

$$\Rightarrow C = u \ln(m_0)$$

$$\Rightarrow v = -gt - u \ln(m_0 - at) + u \ln m_0$$

$$\Rightarrow v(t) = -gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right)$$

c) Calculons la distance parcourue par la fusée à un instant t .

$$\text{On a : } Z(t) = \int v(t) dt$$

$$\Rightarrow Z(t) = \int \left[-gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) \right] dt$$

$$\Rightarrow Z(t) = -g \int t dt + u \int \ln(m_0) dt - \int u \ln(m_0 - at) dt$$

$$\text{Calculons } \int \ln(m_0 - at) dt$$

$$\text{Posons } m_0 - at = x \Rightarrow dx = -a dt \Rightarrow dt = -\frac{1}{a} dx$$

$$\text{Pour } t=0, x = m_0$$

$$\text{Pour } t=t, x = m_0 - at$$

$$\text{donc } -\frac{1}{a} \int_{m_0}^{m_0 - at} \ln x dx = -\frac{1}{a} [x \ln x - x]_{m_0}^{m_0 - at}$$

$$\Rightarrow \int_{m_0}^{m_0 - at} \ln x dx = \left[(m_0 - at) \ln(m_0 - at) - m_0 \ln m_0 + m_0 \right]$$

$$\Rightarrow \int \ln(m_0 - at) dt = -\frac{1}{a} (m_0 - at) \ln(m_0 - at) - t + \frac{1}{a} m_0 \ln(m_0)$$

done

$$Z(t) = u t \ln(m_0) - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{u}{a} (m_0 - at) \ln(m_0 - at) + u t - \frac{u m_0}{a} \ln(m_0)$$

$$\Rightarrow Z(t) = u t \ln(m_0) + \left(\frac{u m_0}{a} - u t \right) \ln(m_0 - at) + u t - \frac{u m_0}{a} \ln(m_0) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{u m_0}{a} [\ln(m_0 - at) - \ln(m_0)] + u t \ln(m_0) - u t \ln(m_0 - at) + u t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{u m_0}{a} \ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right) + u t \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) + u t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Z(t) = \left(u t - \frac{u m_0}{a} \right) \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) + u t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Z(t) = u \left[t - \frac{m_0}{a} \right] \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) + u t - \frac{1}{2} g t^2$$

d) La masse du carburant étant m .
Trouvons la vitesse et la distance parcourue lorsque la combustion s'arrête.

$$\text{On a : } m = m_0 - at$$

La combustion s'arrête au bout d'un temps tel que

$$at = m \quad \text{ou que } t = \frac{m}{a}$$

on a : la vitesse $v(\frac{m}{a})$

$$v(t) = 4 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) - gt$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{m}{a}\right) = 4 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m}\right) - g\left(\frac{m}{a}\right)$$

• la distance $z\left(\frac{m_0}{a}\right)$

$$z(t) = 4\left(5 - \frac{m_0}{a}\right) \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right) + 4t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z\left(\frac{m}{a}\right) = 4\left(5 - \frac{m}{a} - \frac{m_0}{a}\right) \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m}\right) + \frac{4m}{a} - \frac{1}{2}g\left(\frac{m}{a}\right)$$

$$z(t) = \frac{4}{a} [m - m_0] \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m}\right) + \frac{4m}{a} - \frac{1}{2}g\left(\frac{m}{a}\right)$$

Exercice n°5

$$\begin{cases} U(r) = -\frac{k}{r} \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{O}\vec{H} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p} = m\vec{v} \\ \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \end{cases}$$

① Montrons que $\vec{L}$ est constant.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\vec{F}$ étant une force centrale
colinéaire à $\vec{r}$, alors $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$

Déduisons la trajectoire de M

on a : $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{r} \wedge m\vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont dans le même plan donc la trajectoire de M est plane.

② Montrons que le vecteur

$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - m k \frac{\vec{r}}{r}$ est une constante du mouvement

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} - m k \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{F} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) - m k \left(\frac{\frac{dr}{dt} \vec{r} - \vec{r} \frac{dr}{dt}}{r^2} \right)$$

$$= \vec{F} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) - m \frac{k}{r} \frac{dr}{dt} + m \frac{k}{r^2} \vec{r} \frac{dr}{dt}$$

$$= \vec{F} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) - \frac{k}{r} \vec{p} + \frac{k}{r^2} \vec{p} \wedge \vec{r}$$

$$= (\vec{p} \cdot \vec{F}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{F}) \vec{p} - \frac{k}{r} \vec{p} + \frac{k}{r^2} \vec{p} \wedge \vec{r}$$

on a : $\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} \vec{e}_r$

$$= -\frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{r^2} \vec{r} = -\vec{r} \vec{F}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}$$

$$= -\frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}$$

$$= -\frac{k}{r^2} \times \frac{r^2}{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{r} = -\frac{k}{r}$$

On a :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{p} \cdot \vec{F}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{F}) \vec{p} = \frac{L}{r} \vec{p} + \frac{L}{r^2} \vec{r} \vec{p}$$

$$= (\vec{p} \cdot \vec{F}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{p} + (\vec{F} \cdot \vec{r}) \vec{p} - r p \vec{F}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= r p$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{p} \cdot \vec{F}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{F}$$

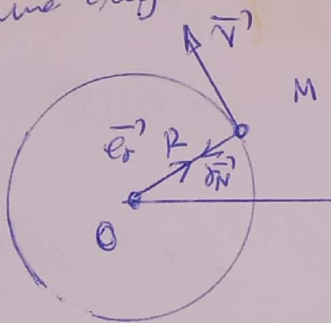
$$= (\vec{F} \cdot \vec{p}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{F}$$

$$= \vec{p} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{F})$$

= 0 car $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont colinéaire donc

$$\vec{A} = \text{cte}$$

3) Calculons $\vec{A}$ pour une trajectoire circulaire autour de O



on a :

$$\begin{cases} r = R \\ \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \end{cases}$$

$$\vec{L} = p R \vec{e}_z = m v R \vec{e}_z$$

$$\vec{p} \wedge \vec{L} = p m v R \vec{e}_z$$

$$= m^2 v^2 R \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} = m^2 v^2 \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\vec{A} = m^2 v^2 \vec{r} - m \frac{L^2}{R} \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{R^2} \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{k \vec{r}}{R} = -R^2 \vec{F}$$

$$\vec{A} = m^2 v^2 \vec{r} + m \vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$= m^2 v^2 \vec{r} - m R^2 m \frac{v^2}{R} \frac{\vec{r}}{R}$$

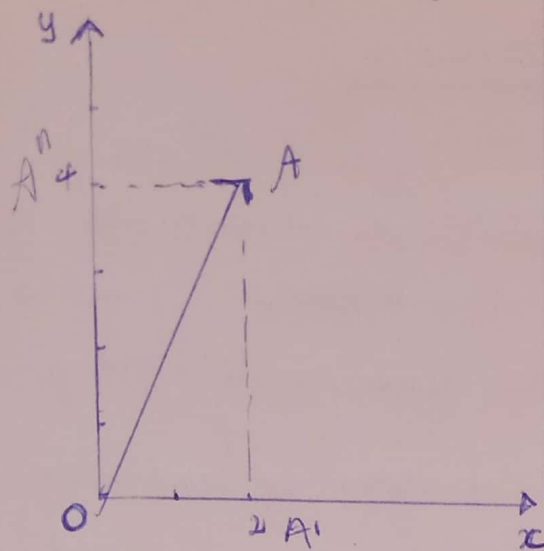
$$\vec{A} = m^2 v^2 \vec{r} - m^2 v^2 \vec{r}$$

$$\vec{A} = \vec{0}$$

Pour une trajectoire circulaire

Exercice n° 8

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y - 2x)\vec{j}$$



1) calculons le travail reçu par la particule en fonction de a

a) si elle se déplace en ligne droite du point $O(0,0)$ vers $A(2,4)$

$$\text{on a: } W = \int \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

$$W_{(OA)} = \int_0^2 (F_x dx + F_y dy) \\ = \int_0^2 F_x dx + \int_0^2 F_y dy$$

$$= \int_0^2 (x - ay) dx + \int_0^2 (3y - 2x) dy$$

on a: $(OA): y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$
donc

$$W_{OA} = \int_0^2 (x - 2ax) dx + \int_0^2 (3 \times 2x - 2x) dx \\ = \int_0^2 (1 - 2a)x dx + \int_0^2 8x dx \\ = \int_0^2 (x + 8x - 2ax) dx$$

$$W_{OA} = \int_0^2 (9x - 2ax) dx$$

$$W_{OA} = \frac{9}{2} [x^2]_0^2 - 2a \times \frac{1}{2} [x^2]_0^2$$

$$W_{OA} = \frac{9}{2} (4 - 0) - a (4 - 0)$$

$$\Rightarrow W_{OA} = (18 - 4a) \text{ J}$$

b) suivant le trajet $OA'A$.

on a:

$$W_{OA'A} = W_{OA'} + W_{A'A} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\neq W_{OA'}$$

$$(OA'): y = 0 \Rightarrow dy = 0$$

$$\text{donc } W_{OA'} = \int_0^2 F_x dx = \int_0^2 (x - ay) dx$$

$$\Rightarrow W_{OA'} = \int_0^2 x dx$$

$$\Rightarrow W_{OA'} = \frac{1}{2} [x^2]_0^2 = \frac{1}{2} (4 - 0)$$

$$\Rightarrow W_{OA'} = 2 \text{ J}$$

$$\neq W_{A'A}$$

$$(A'A): x = 2 \Rightarrow dx = 0$$

$$\text{donc } W_{A'A} = \int_0^4 (2 - ay) dx + \int_0^4 (3y - 4) dy$$

$$W_{A'A} = \int_0^4 (3y - 4) dy$$

$$= \frac{3}{2} [y^2]_0^4 - 4 [y]_0^4$$

$$= 24 - 16$$

$$W_{AA} = 8J$$

donc $W_{OA'A} = 2J + 8J$

$$\Rightarrow W_{OA'A} = 10J$$

c) suivant le trajet $OA''A$.

on a: $W_{OA''A} = W_{OA''} + W_{A''A}$

$$W_{OA''} = \int_0^4 (F_x dx + F_y dy)$$

$(OA'') : x = 0 \Rightarrow dx = 0$

$$\Rightarrow W_{OA''} = \int_0^4 F_y dy = \int_0^4 (3y - 2x) dy$$

$$= \int_0^4 3y dy$$

$$= \frac{3}{2} [y^2]_0^4$$

$$= \frac{3}{2} (16)$$

$$\Rightarrow W_{OA''} = 24J$$

$$W_{A''A} = \int_0^2 (F_x dx + F_y dy)$$

$(A''A) : y = 4 \Rightarrow dy = 0$

$$\Rightarrow W_{A''A} = \int_0^2 F_x dx = \int_0^2 (x - ay) dx$$

$$= \int_0^2 (x - 4a) dx$$

$$= \frac{1}{2} [x^2]_0^2 - 4a [x]_0^2$$

$$= 2 - 8a$$

$$\Rightarrow W_{A''A} = (2 - 8a)J$$

Ainsi: $W_{OA''A} = (26 - 8a)J$

Conclusion:

On a: $W_{OA'A} \neq W_{OA''A}$. Le travail de la particule dépend du chemin suivi. donc la force $\vec{F}$ ne dérive pas de l'énergie potentielle.

② Calculons en fonction de a , le travail reçu par la particule qui effectue un tour le long du cercle centre' en O , de rayon 2 dans le sens trigonométrique.

En coordonnées polaires, on a:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi], r = 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2 \sin \theta d\theta \\ dy = 2 \cos \theta d\theta \end{cases}$$

on a: $W = \int_0^{2\pi} (F_x dx + F_y dy)$

$$W = \int_0^{2\pi} (x - ay) dx + \int_0^{2\pi} (3y - 2x) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta - 2a \sin \theta) (-2 \sin \theta) d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} (3 \times 2 \sin \theta - 2 \times 2 \cos \theta) (2 \cos \theta) d\theta$$

$$W = - \int_0^{2\pi} 2x \sin \theta \cos \theta d\theta + 4a \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 6 \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta - 8 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} (2 \sin \theta \cos \theta) d\theta + 4 \int_0^{2\pi} (a \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= -4 \times \frac{1}{2} [\cos \theta]_0^{2\pi} + 4 \left[\frac{a-2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} + \frac{a+2}{4} [\sin 2\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi[2(a-2)]}{2}$$

$$W = 4(a-2)\pi$$

② Determinons la Valeur de a pour laquelle $\vec{F}$ dérive de v

$$\text{on a } W = 0 \Rightarrow 4(a-2)\pi = 0$$

$$\Rightarrow (a-2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

Determinons $V(x, y)$

$$\text{on a: } \vec{F} = -\text{grad } V(x, y)$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\text{Ainsi: } \vec{F} \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

$$F_x = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow -\frac{dV(x, y)}{dx} = F_x$$

$$\Rightarrow dV(x, y) = -F_x dx$$

$$\Rightarrow dV(x, y) = -(x - ay) dx$$

$$\Rightarrow V(x, y) = -\int (x - ay) dx$$

$$\Rightarrow V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + ayx + f(y)$$

• Determinons $f(y)$

$$\text{on a: } V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + ayx + f(y)$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = ax + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -ax - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = F_y$$

$$\Rightarrow -ax - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = (3y - 2x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -ax + 2x - 3y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = (2-a)x - 3y$$

$$\Rightarrow df(y) = [(2-a)x - 3y] dy$$

$$\Rightarrow f(y) = \int (2-a)x dy - 3 \int y dy$$

$$\Rightarrow f(y) = (2-a)xy - \frac{3}{2}y^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

donc $V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + axy + (2-a)xy - \frac{3}{2}y^2 + C, C \in \mathbb{R}$

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2axy - \frac{3}{2}y^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2axy + C$$

$$V(x,y) = 2axy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C, C \in \mathbb{R}$$

Deduction.

Puisq $\vec{F}$ dérive de $V(x,y)$ - alors on peut dire que

$$\omega_{OA} = \omega_{OA'A} \neq \omega_{OA''A}$$

Exercice N°10

$$V(r) = \frac{k}{r} \quad \text{avec } k = Gmm > 0$$

1) Établissons l'équation différentielle liant $u = \frac{1}{r}$ et θ

on a: $\vec{OP} = r\vec{e}_r$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad \text{avec } v^2 = (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) \quad \text{et} \quad \frac{k}{r} = ku$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - ku$$

on a: $\vec{r} = m\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\sigma}{r} = mr\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \Gamma u = mr\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow (\Gamma u)^2 = m^2(r\dot{\theta})^2$$

$$\Rightarrow (r\dot{\theta})^2 = \left(\frac{\Gamma u}{m}\right)^2$$

on a aussi

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow dr = -\frac{du}{u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{u^2} \left(-\frac{du}{d\theta}\right) \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

done

$$E = \frac{1}{2} m \left[\frac{\dot{\theta}^2}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{u}{m} \right)^2 \right] - k u$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \frac{\dot{\theta}^2}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{u}{m} \right)^2 - k u$$

$$\Gamma = m c \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \frac{\Gamma}{m}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\Gamma u^2}{m}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \frac{\Gamma^2 u^4}{m^2 u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{\Gamma^2 u^2}{m^2} - k u$$

$$r^2 + (r \dot{\theta})^2 = \frac{2(E + k u)}{m}$$

$$\frac{\Gamma^2}{m^2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{\Gamma^2 u^2}{m^2} \right] = \frac{2(E + k u)}{m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2m(E + k u)}{\Gamma^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \frac{2m k u}{\Gamma^2} = \frac{2m E}{\Gamma^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \left(u - \frac{m k}{\Gamma^2} \right)^2 = \frac{2E m}{\Gamma^2} + \left(\frac{m k}{\Gamma^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \left(u - \frac{m k}{\Gamma^2} \right)^2 = \frac{m k}{\Gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2 \Gamma^2 E}{m k^2}}$$

2) a) donnons l'équation de la trajectoire de P.

L'équation est sous la

$$\text{forme } \left(\frac{dB}{d\theta} \right)^2 + B^2 = A^2$$

$$B = A \cos(\theta - \theta_0)$$

$$u - \frac{m k}{\Gamma^2} = \frac{m k}{\Gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2 \Gamma^2 E}{m k^2}} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$u = \frac{m k}{\Gamma^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \Gamma^2 E}{m k^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m k}{\Gamma^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 E \Gamma^2}{m k^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{\Gamma^2}{m k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2 E \Gamma^2}{m k^2}} \cos(\theta - \theta_0)}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre $p = \frac{\Gamma^2}{m k}$ et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{2 E \Gamma^2}{m k^2}}$

(b) donnons une relation entre T et E

$$S = \frac{1}{2} c t + s_0$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{\pi a b}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2 \pi a b}{c}$$

$$p = a(1 - e^2) \Rightarrow a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{\Gamma^2}{m k}}{1 - 1 - \frac{2 \Gamma^2 E}{m k^2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\Gamma^2}{m k} \times \frac{m k^2}{2 \Gamma^2 (-E)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{E}{2(-E)}$$

$$\star p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow b = \sqrt{p a}$$

$$b = \sqrt{Pa'} = 0 \quad b = \sqrt{\frac{\Gamma_0^2}{m k} \times \frac{k}{2(-E)}}$$

$$= 0 \quad b = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{-2mE}}$$

$$\Gamma_0 = mc = 0 \quad c = \frac{\Gamma_0}{m}$$

$$\text{donc } T = 2\pi \times \frac{k}{2(-E)} \times \frac{\Gamma_0}{\sqrt{-2mE}} \times \frac{m}{\Gamma_0}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi m k}{(-E) \sqrt{-E} \sqrt{2m}} = \frac{\pi m k}{\sqrt{2m} (-E)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 m^2 k^2}{2m} (-E)^{-3}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 m^2 k^2}{2} (-E)^{-3}$$

* 3^{ème} loi de Kepler.

$$\text{on a: } T^2 = \frac{\pi^2 k^2}{2} (-E)^{-3}$$

$$\text{avec } E = -\frac{k}{2a}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 k^2}{2} \left(\frac{k}{2a}\right)^{-3}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 k^2 a^3 \times 8}{2 \times k^3}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

$$\text{Ainsi } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} = \text{cte}$$

3) application.

$a = 230$ millions de km en 1,88 années.

$a' = 23.000$ km en 30h.

• déterminons la masse de la planète terre.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{G M m} a^3 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G M} a^3$$

$$T'^2 = \frac{4\pi^2 m'}{G m m'} = 0 \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G m} a'^3$$

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{G M} \times \frac{G m}{4\pi^2} \left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{m}{M} \left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

$$\Rightarrow m = M \left(\frac{T}{T'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^3$$

$$\text{AN: } m = 2 \cdot 10^3 \times \left(\frac{1,88 \times 365 \times 24}{30}\right)^2 \left(\frac{23 \cdot 10^3}{23 \cdot 10^7}\right)^3$$

$$m = 6,027 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

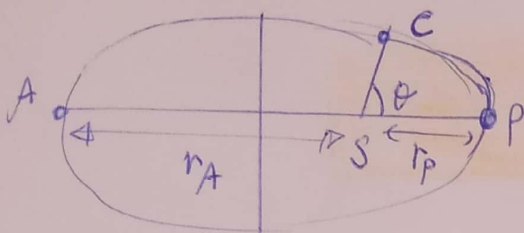
Exercice n° 44

1) $T = 11,5 \text{ an}$

$r_p = 0,2 \text{ UA}$, $a = 150 \text{ millions de km}$

Calculons

1) La distance r_A de l'apogée au soleil.



on a: $T_c^2 = \frac{4\pi^2 m a_c^3}{GMm} \Rightarrow T_c^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a_c^3$

$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m_T a_0^3}{GM m_T} \Rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a_0^3$

$\Rightarrow \left(\frac{a_c}{a_0}\right)^3 = \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{a_c}{a_0} = \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a_c = a_0 \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}$

On a aussi: $r_A + r_p = 2a_c$

$\Rightarrow r_A = 2a_c - r_p$

$\Rightarrow r_A = 2a_0 \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} - r_p$

AN: $r_A = 2 \times 150 \cdot 10^7 \left(\frac{11,5}{1}\right)^{\frac{2}{3}} - 0,2$

$r_A = 9,99 \approx 10 \text{ UA}$

b) L'excentricité.

$r_A + r_p = 2a$

$r_p = a(1-e)$ et $r_A = a(1+e)$

$\frac{r_A}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow (1-e)r_A = r_p(1+e)$

$\Rightarrow r_A - r_p = e(r_p + r_A)$

$\Rightarrow e = \frac{r_A - r_p}{r_p + r_A}$

AN: $e = \frac{10 - 0,2}{10 + 0,2}$

$e = 0,96$

2) Comparons v_p au perigée et v_0

$e = 1$ car la trajectoire est ~~par~~ parabolique

donc $E_m = 0$

$E_m = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G m M_\odot}{r_p} = 0$

$\Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}$

La terre décrit une trajectoire pratiquement circulaire au tour du soleil de rayon a_0

En appliquant la RFD ~~les~~ on a:

$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\ddot{r}}$

$\Rightarrow \frac{GMm}{a_0^2} = m \frac{v_0^2}{a_0} \Rightarrow v_0^2 = \frac{GM}{a_0}$

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{et} \quad V_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}$$

$$\frac{V_p}{V_0} = \sqrt{\frac{2GM}{r_p} \times \frac{r_0}{GM}} \Rightarrow \frac{V_p}{V_0} = \sqrt{\frac{2r_0}{r_p}}$$

$$\text{AN: } \frac{V_p}{V_0} = \sqrt{\frac{2 \times 1}{0,2}} = 3,16$$

$$\frac{V_p}{V_0} = 3,16 > 1 \Rightarrow \frac{V_p}{V_0} > 1$$

$$\Rightarrow V_p > V_0$$

Exercice n°9

$$\vec{on} = (a \cos \omega t) \vec{i} + (b \sin \omega t) \vec{j}$$

1) a) montrons que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p .

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{on a: } \vec{F} = m \vec{\ddot{r}} \quad \text{avec} \quad \vec{\ddot{r}} = \frac{d^2 \vec{on}}{dt^2}$$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = b \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = -b \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \begin{cases} F_x = -m a \omega^2 \cos \omega t \\ F_y = -m b \omega^2 \sin \omega t \\ F_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

donc $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle.

• déterminons E_p en fonction de m , ω et $r = |\vec{on}|$

$$\text{on a: } \vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

$$-\vec{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x = 0 \quad \frac{dE_p}{dx} = m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow dE_p = m\omega^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int dE_p = m\omega^2 \int x dx$$

$$\Rightarrow E_{p_x} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Pour $x=0$, $E_{p_0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$E_{p_x} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

$$\bullet \frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y \Rightarrow \frac{dE_p}{dy} = m\omega^2 y$$

$$\Rightarrow dE_p = m\omega^2 y dy$$

$$\Rightarrow \int dE_p = m\omega^2 \int y dy$$

$$\Rightarrow E_{p_y} = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + C_2$$

$$C_2 \in \mathbb{R}$$

Pour $y=0$, $E_{p_0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$E_{p_y} = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \quad (2)$$

De (1) et (2) $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 (y^2 + x^2)$

on a: $r^2 = y^2 + x^2$

donc $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

b) Déduisons le travail de $\vec{F}$ pour un déplacement de r_1 vers r_2

on a: $dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\Rightarrow dw = -\text{grad } E_p \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dw = -\frac{\partial E_p}{\partial r} dr$$

$$\Rightarrow \int dw = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{dE_p}{dr} dr$$

$$\Rightarrow w = -\frac{1}{2} m\omega^2 [r^2]_{r_1}^{r_2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_2^2)$$

$$w = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_2^2)$$

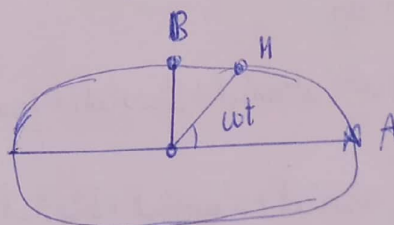
② on calcule le rapport des énergies cinétiques $E_c(A)$ et $E_c(B)$ en fonction de e .

on a: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{x} = -a\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = b\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^2 = a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

$$\text{Ainsi } E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)$$



• Au point A, $\omega t = 0 \Rightarrow E_c(A) = \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$

• Au point B, $\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_c(B) = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$

donc $\frac{E_c(A)}{E_c(B)} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \approx \frac{1}{a}$

$$\text{th } a: p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1-e^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_c(A)}{E_c(B)} = 1-e^2$$

b) Verifions le theoreme de l'energie cinetique au point (entre) A et B

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) = W(\vec{F})$$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 b^2$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2)$$

$$W(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m (r_A^2 - r_B^2) \omega^2$$

$$r_A = a \text{ et } r_B = b$$

$$\text{donc } W(\vec{F}) = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2)$$

$$\text{Ainsi } \Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) = W(\vec{F})$$

3) a) Verifions la conservation de l'energie mecanique (energie totale)

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t) + \frac{1}{2} m (x^2 + y^2) \omega^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 + b^2) = \text{cte}$$

b) Deduisons

* La position de n

$$E_c = E_p = \frac{E_m}{2} \Rightarrow E_m = 2E_p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 + b^2) = m \omega^2 r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

* Les instants

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \\ \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \omega t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$$

fin